



Prof. Andrzej S. NOWAK *anowak2@unl.edu*  
University of Nebraska, USA

## ANALIZA RYZYKA I OCENA NIEZAWODNOŚCI KONSTRUKCJI W PRAKTYCE BUDOWLANEJ

### RISK ANALYSIS AND RELIABILITY ASSESSMENT FOR STRUCTURES

**Streszczenie** Przedstawiono w skrócie podejście do analizy ryzyka i niezawodności. Obliczenia przeprowadzono metodą Monte Carlo. Podsumowano statystyczne modele obciążeń dla budynków oraz nośności dla elementów stalowych, żelbetowych i z betonu sprężonego. Wyszczególniono zmienne losowe, które mają największy wpływ na niezawodność elementów konstrukcyjnych.

**Abstract** Risk analysis methods are summarized. The calculations are performed using Monte Carlo method. Statistical models are presented for building load components and for structural components made of steel, reinforced concrete and prestressed concrete. Random variables that can strongly affect the reliability are identified.

### 1. Wprowadzenie

Konstrukcje budowlane mają spełniać określone zadania lub pełnić określone funkcje. Dla przykładu, budynki mieszkalne powinny zapewniać bezpieczne schronienie (dach nad głową) oraz bardziej lub mniej dokładnie określone warunki wiążące się ze standardem życia użytkowników. Wymagania stawiane budynkowi dotyczą ograniczenia odkształceń, ugięć, zarysowań, nie mówiąc już o awariach czy zawaleniach. Do tego dochodzą ważne dla użytkowników ograniczenia dotyczące akustyki, izolacji termicznej i wilgotnościowej czy przeciwpożarowej. Praktyka budowlana wymaga jasnego ustalenia granicy między dopuszczalną a nie dopuszczalną realizacją obiektu. Granica ta nazywana jest stanem granicznym.

Rozróżnia się następujące rodzaje stanów granicznych:

- Nośności (nośność belki na zginanie czy ścianie, nośność słupa, nośność ramy)
- Użytkowości (ugięcia, drgania, zarysowania)
- Zmęczenia (obniżona wytrzymałość konstrukcji na wielokrotnie powtarzane obciążenia)
- Obciążeń wyjątkowych (bardzo rzadkie obciążenia ale o wyjątkowo wielkich skutkach takie jak trzęsienie ziemi, huragan, tornado, tsunami, powódź, zderzenia, wybuchy, akty terrorystyczne)

W projektowaniu każdy stan graniczny powinien być wyrażony poprzez równanie stanu granicznego, to jest matematyczny wzór (nierówność), funkcję parametrów obciążenia, właściwości materiału oraz wymiarów. Funkcje stanu granicznego są zawarte w normach budowlanych i wyznaczają granice między dopuszczalną i niedopuszczalną realizacją konstrukcji. Zadaniem projektanta jest zapewnienie, żeby projektowana konstrukcja spełniała równania stanu granicznego.

Parametry normowe są podane jako wartości deterministyczne podczas gdy w rzeczywistości są to zmienne losowe. Dlatego realizacja konstrukcji budowlanych jest związana z ryzykiem, które zależy od wielu czynników takich jak:

- Losowo zmienne obciążenia naturalne, a zwłaszcza obciążenia wyjątkowe (śnieg, wiatr, temperatura, trzęsienie ziemi)
- Losowo zmienne obciążenia związane z działalnością człowieka, w tym również obciążenia wyjątkowe (pożar, wybuch gazu, kolizja z pojazdem lub jednostką pływającą, akt terrorystyczny)
- Losowo zmienne własności materiałów i elementów konstrukcyjnych (wytrzymałość, wymiary)
- Niedokładne modele analityczne konstrukcji (warunki brzegowe, uproszczone modele obciążeń, rozkład obciążeń, zaokrąglone wyniki)
- Błędy w planowaniu, projektowaniu, wykonaniu konstrukcji w zakładzie i na placu budowy, transporcie do placu budowy, użytkowaniu i w końcu przy rozbiórce.

Nie ma konstrukcji 100-procentowo niezawodnych. Można przyjąć, że dla każdego obiektu ryzyko, które oznacza prawdopodobieństwo awarii, ma pewną wartość skończoną. Zasadniczym problemem jest ustalenie optymalnego poziomu ryzyka. Można oczekiwać, że zbyt duże ryzyko prowadzi do wzrostu liczby awarii budowlanych. Z drugiej strony, obniżenie ryzyka wiąże się ze wzrostem kosztów. W referacie przedstawiono metody obliczania prawdopodobieństwa awarii i niezawodności konstrukcji, podstawowe kryteria w ustalaniu optymalnego poziomu ryzyka, oraz metody realizacji optymalnego ryzyka w praktyce budowlanej.

## 2. Metody obliczania ryzyka i niezawodności

Ryzyko oblicza się dla określonego stanu granicznego i jest to prawdopodobieństwo, że stan graniczny zostanie przekroczony. Funkcja stanu granicznego ma zwykle postać równania,

$$g(X_1, \dots, X_n) = 0 \quad (1)$$

gdzie  $X_i$  dla  $i = 1, \dots, n$  są parametrami obciążeń i nośności, przy czym stan bezpieczny odpowiada wartościom  $(X_1, \dots, X_n)$ , które spełniają następującą nierówność,

$$g(X_1, \dots, X_n) \geq 0 \quad (2)$$

a stan awaryjny odpowiada wartościom  $(X_1, \dots, X_n)$ , które spełniają następującą nierówność,

$$g(X_1, \dots, X_n) < 0 \quad (3)$$

Zatem obliczenie ryzyka polega na oszacowaniu prawdopodobieństwa,  $P_f$ , że zachodzi powyższa nierówność. Operowanie terminem „prawdopodobieństwo awarii” powoduje negatywne skojarzenia. Dlatego coraz szersze zastosowanie ma „współczynnik bezpieczeństwa”,  $\beta$ , w światowej literaturze nazywany „reliability index”.

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (4)$$

gdzie  $\Phi^{-1}$  jest funkcją odwrotną do dystrybuanty zmiennej losowej normalnej standaryzowanej.

Zależność ta jest przedstawiona w Tablicy 1.

Tablica 1. Zależność pomiędzy  $P_f$  i  $\beta$

$P_f$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$
$\beta$	1.28	2.33	3.09	3.71	4.26	4.75	5.19	5.62	5.99

Dla typowych elementów konstrukcyjnych takich jak belki i słupy współczynniki bezpieczeństwa wynoszą,  $\beta = 3-4$  [1, 2].

Parametry  $X_1, \dots, X_n$  są zmiennymi losowymi. Praktyczne metody obliczania ryzyka dla konstrukcji budowlanych mają stosunkowo krótką bo 40-letnią historię. Są one przedstawione w podręcznikach, np. [1]. Metody różnią się w zależności od: wymaganych danych wyjściowych (pełne dystrybuanty czy tylko wartość średnia i odchylenie standardowe), formy funkcji stanu granicznego (liniowa czy nieliniowa), stopnia korelacji między zmiennymi losowymi  $X_1, \dots, X_n$ , wymaganej dokładności, wymaganej mocy komputerowej.

W przybliżeniu można określić  $\beta$  z następującego wzoru,

$$\beta = \frac{g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i \sigma_{X_i})^2}} \quad (5)$$

gdzie  $\mu_{X_i}$  jest wartością średnią  $X_i$ ,  $\sigma_{X_i}$  jest odchyleniem standardowym  $X_i$ , i  $a_i = \frac{\partial g}{\partial X_i}$

Obecnie najskuteczniejszą metodą jest obliczanie  $P_f$  oraz  $\beta$  przez symulacje metodą Monte Carlo [1]. Metoda ta polega na komputerowym generowaniu liczb losowych, co odpowiada rozpatrywaniu wielkich ilości możliwych kombinacji parametrów  $X_1, \dots, X_n$ . Metodę tę można podsumować następująco:

- Dla danej funkcji stanu granicznego,  $g(X_1, \dots, X_n) = 0$ , oblicz  $P_f$  oraz  $\beta$
- Dane wyjściowe: dla każdego  $X_i$  potrzebna jest funkcja dystrybuanty,  $F_i$ 
  1. Używając generatora liczb losowych o rozkładzie równomiernym, dla każdego parametru  $i$  wygeneruj  $u_i$ , gdzie  $0 \leq u_i \leq 1$
  2. Dla każdego parametru  $i$  oblicz  $x_i$ 

$$x_i = F^{-1}(u_i) \quad (6)$$
  3. Oblicz i zapamiętaj wartość  $g(x_1, \dots, x_n)$

- Powtórz powyższe trzy kroki  $N$  razy, gdzie  $N$  jest zwykle bardzo dużą liczbą (np. 10000 lub milion)

Po otrzymaniu  $N$  wartości dla funkcji stanu granicznego  $g$ , pozostaje obliczenie  $P_f$  oraz  $\beta$ . Można tego dokonać przez wykreślenie dystrybuanty wartości  $g$  na arkuszu probabilistycznym i odczytanie bezpośrednio z wykresu zarówno  $P_f$  oraz  $\beta$ .

### 3. Statystyczne modele obciążeń

Obciążenia obejmują szereg składowych takich jak obciążenia stałe, zmienne, naturalne (śnieg, wiatr, trzęsienia ziemi, temperatura) jak również wyjątkowe (pożar, wybuchy, akty terrorystyczne). Losową zmienność obciążeń charakteryzuje nie tylko wielkość oddziaływania ale także, a często głównie, zmienność w czasie. Istnieje zasadnicza różnica między obciążeniami stałymi (ciężar własny konstrukcji) a tymi, które występują bardzo rzadko jak wielka siła (trzęsienie ziemi). Szczególnego podejścia wymaga kombinacja obciążeń, czyli modelowanie równoczesnego występowania zmiennych w czasie składników.

Wielkość obciążenia może być wyrażona przez dystrybuantę lub przynajmniej dwa parametry. Wygodnie jest używać bezwymiarowe parametry takie jak współczynnik odchylenia od średniej,  $\lambda$ , równy stosunkowi wartości średniej do nominalnej (czyli projektowej) oraz współczynnik zmienności,  $V$ , równy stosunkowi odchylenia standardowego do wartości średniej.

Kombinacje obciążeń były przedmiotem szeregu badań. Jednym z najprostszych modeli jest tzw. „reguła Turkstra”, która okazała się bardzo skuteczna w praktyce [3, 4]. Turkstra rozpatrywał przypadki równoczesnego występowania kilku składników obciążeń, a w szczególności obciążeń wyjątkowych. Zaobserwował, że krótkotrwałe obciążenia nie przyjmują równocześnie wartości ekstremalnych. Na przykład, w momencie, w którym występuje silne trzęsienie ziemi pozostałe obciążenia wyjątkowe są praktycznie na poziomie średnim, a więc wiatr towarzyszący trzęsieniu ziemi może mieć szybkość 5-10 km/h. Podobnie rozumując, w momencie rekordowo huraganowego wiatru, obciążenie zmienne w budynku biurowym wynosi ok. 0.5 kN/m<sup>2</sup> co jest wartością średnią w dowolnym momencie czasu. Dlatego potrzebne dane statystyczne dla każdej składowej obciążenia obejmują:

- Współczynnik  $\lambda$  oraz  $V$  dla wartości ekstremalnej, to znaczy maksymalnej jakiej można oczekiwać w ciągu całego okresu użytkowania konstrukcji
- Współczynnik  $\lambda$  oraz  $V$  dla wartości średniej, to znaczy takiej jakiej można oczekiwać w losowo wybranym momencie użytkowania konstrukcji

Przykłady parametrów dla różnych składników obciążenia przedstawiono w Tabelicy 2 [5, 6].

### 4. Statystyczne modele nośności

Nośność elementów konstrukcyjnych,  $R$ , może być rozpatrywana jako iloczyn trzech czynników:

$$R = M F P \quad (7)$$

Tablica 2. Parametry składników obciążenia

Składnik obciążenia	Wartości ekstremalne	Wartości średnie
Stałe – ciężar własny stali i prefabrykatów	$\lambda = 1.03$ $V = 0.08$	$\lambda = 1.03$ $V = 0.08$
Stałe – ciężar własny żelbet	$\lambda = 1.05$ $V = 0.10$	$\lambda = 1.05$ $V = 0.10$
Zmienne w budynkach biurowych	$\lambda = 1.00$ $V = 0.18$	$\lambda = 0.24$ $V = 0.65$
Wiatr	$\lambda = 0.78$ $V = 0.37$	$\lambda = 0.05$ $V = 0.80$
Śnieg	$\lambda = 0.82$ $V = 0.26$	$\lambda = 0.20$ $V = 0.87$
Trzęsienie ziemi	$\lambda = 0.66$ $V = 0.56$	$\lambda = 0.00$ $V = 0.00$

gdzie  $M$  reprezentuje właściwości materiałowe (wytrzymałość, granica plastyczności, moduł sprężystości),  $F$  reprezentuje losową zmienność wymiarów (pole powierzchni, moment bezwładności, wskaźnik wytrzymałości),  $P$  reprezentuje niedokładności w modelu analitycznym stosowanym do obliczania nośności. Wartość średnią nośności elementu i współczynnik zmienności można obliczyć jak następuje,

$$\mu_R = \mu_M + \mu_F + \mu_P \quad (8)$$

$$V_R^2 = V_M^2 + V_F^2 + V_P^2 \quad (9)$$

Przykłady parametrów statystycznych tych czynników przedstawiono w Tablicy 3 dla elementów ze stali walcowanej na gorąco [5], w oparciu o wyniki badań materiałowych z lat 1970-tych.

Dla elementów żelbetowych i sprężonych wyniki badań materiałowych pochodzą z lat 2001-03 i zostały przeprowadzone w związku z kalibracją amerykańskiej normy ACI-318 [7]. Badania obejmowały beton o wytrzymałości 20–42 MPa, pręty zbrojeniowe ze stali o granicy plastyczności 420 MPa oraz struny sprężające o wytrzymałości 1890 MPa.

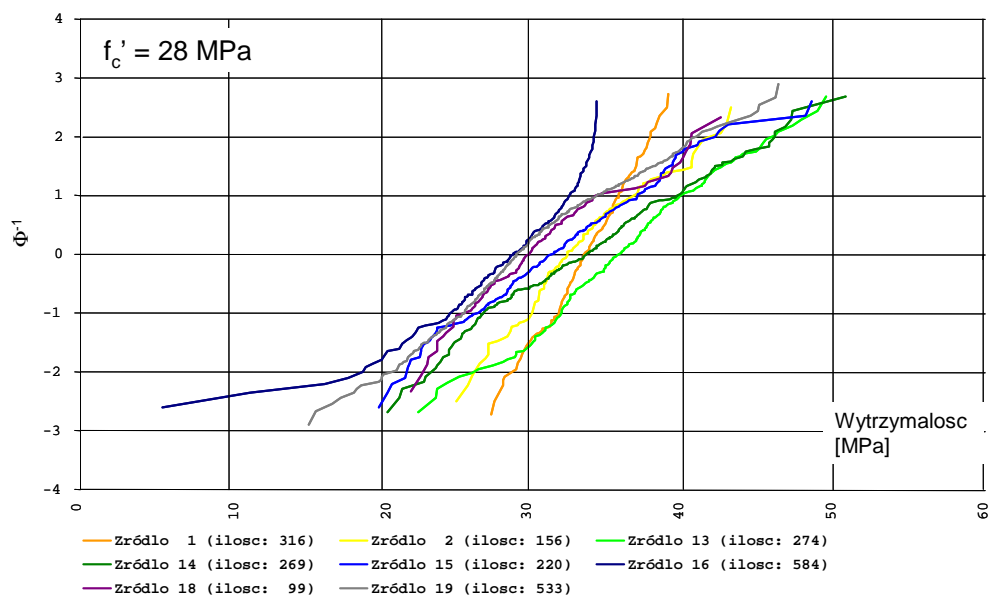
Dystrybuanty rozkładu wytrzymałości dla tych materiałów wykreślono na arkuszu probabilistycznym tak, żeby ułatwić interpretację wyników [1]. Arkusz probabilistyczny może pozwolić na określenie typu rozkładu, a w szczególności na porównanie z rozkładem normalnym. Jeśli dystrybuanta jest zbliżona do linii prostej, to znaczy że rozkład jest normalny. Skala na osi pionowej oznacza odległość od wartości średniej wyrażoną w odchyleniach standardowych. Dlatego wartość średnią można odczytać bezpośrednio z wykresu jako współrzędną poziomą punktu przecięcia osi poziomej o współrzędnej pionowej równej 0. Kąt nachylenia dystrybuanty pozwala oszacować wartość odchylenia standardowego (im bardziej pionowa jest dystrybuanta tym mniejsze jest odchylenie standardowe).

Przykłady rozkładów wytrzymałości betonu na ściskanie przedstawiono na rysunku 1, dla 28 MPa [8]. Różne krzywe reprezentują wyniki badań z różnych zakładów. Okazuje się, że współczynnik  $\lambda$  maleje ze wzrostem wytrzymałości betonu, od 1.3 dla 18 MPa do 1.10 dla 70 MPa. Współczynnik zmienności również zmniejsza się od 0.17 do 0.11.

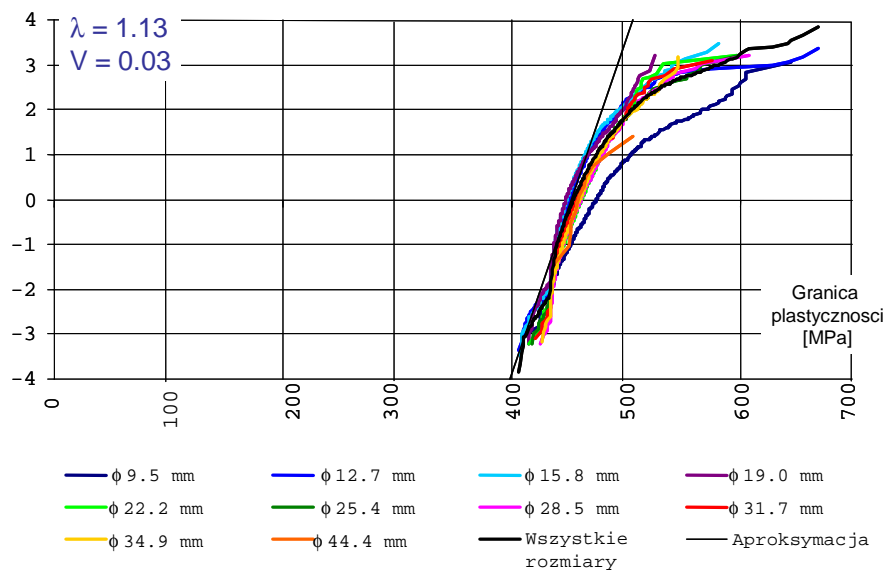
Na rysunku 2 wykreślono dystrybuanty dla prętów zbrojeniowych o średnicy od 9.5 mm do 44 mm (15000 próbek) [8]. Współczynnik  $\lambda$  jest w granicach 1.12-1.14, a  $V$  jest 0.02. Na rysunku 3 przedstawiono wyniki dla strun sprężających (45000 próbek). Dystrybuanty są prawie pionowe,  $\lambda$  jest 1.02-1.04 a  $V$  jest 0.015 [8].

Tablica 3. Parametry statystyczne dla stali walcowanej na gorąco [5]

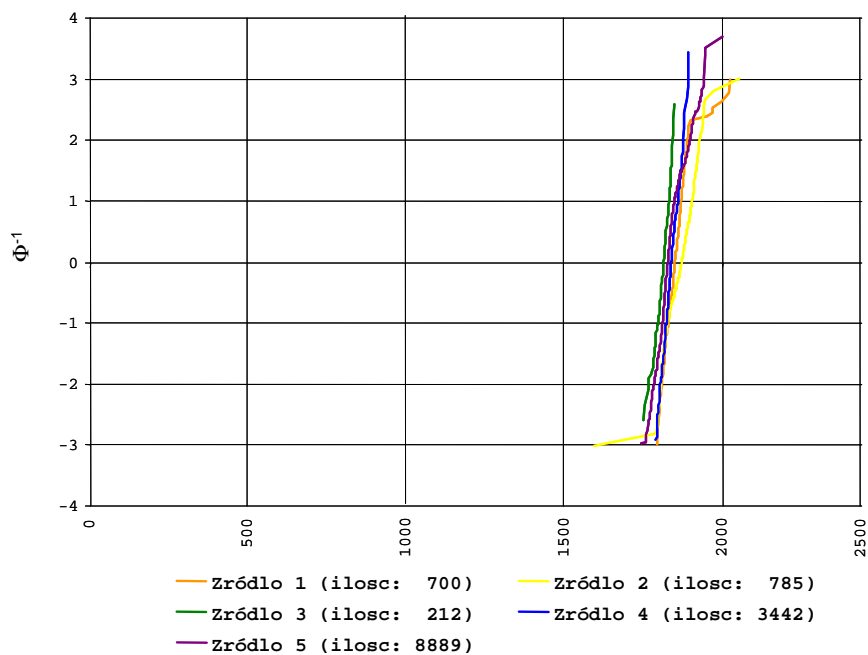
Typ Elementu	$\mu_P$	$V_P$	$\mu_M$	$V_M$	$\mu_F$	$V_F$	$\lambda_R$	$V_R$
elementy rozciągane (uplastycznienie)	1.00	0.00	1.05	0.10	1.00	0.05	1.05	0.11
elementy rozciągane (zniszczenie)	1.00	0.00	1.10	0.10	1.00	0.05	1.10	0.11
belki stalowe	1.02	0.06	1.05	0.10	1.00	0.05	1.07	0.13
belki stalowe (ciągłe)	1.06	0.07	1.05	0.10	1.00	0.05	1.11	0.13
belki w zakresie sprężystym (wyboczenie w kierunku poziomym)	1.03	0.09	1.00	0.06	1.00	0.05	1.03	0.12
belki w zakresie plastycznym (wyboczenie w kierunku poziomym)	1.06	0.09	1.05	0.10	1.00	0.05	1.11	0.14
dźwigary blachownicowe (zginanie)	1.03	0.05	1.05	0.10	1.00	0.05	1.08	0.12
słupy zginane	1.02	0.10	1.05	0.10	1.00	0.05	1.07	0.15



Rys 1. Dystrybuanty wytrzymałości betonu 28 MPa



Rys 2. Dystrybuanty wytrzymałości stali zbrojeniowej 420 MPa



Rys 3. Dystrybuanty wytrzymałości strun sprężających 1890 MPa

Dla czynników F i P parametry statystyczne przedstawiono w Tablicach 4 i 5 [5].

Tablica 4. Parametry statystyczne dla współczynnika F [5]

Element	$\lambda$	$\nu$
szerokość belki, wykonywanej na miejscu budowy	1.01	0.04
efektywna wysokość belki żelbetowej	0.99	0.04
efektywna wysokość belki sprężonej	1.00	0.025
efektywna wysokość płyty, wykonywanej na miejscu budowy	0.92	0.12
efektywna wysokość płyty, wykonywanej fabrycznie	1.00	0.06
efektywna wysokość płyty, sprężanej	0.96	0.08
szerokość słupa	1.005	0.04

Tablica 5. Parametry statystyczne dla współczynnika P [5]

Element	$\lambda$	$\nu$
belka, zginanie	1.02	0.06
belka, ścinanie	1.075	0.10
płyta	1.02	0.06
słup niezwojony	1.00	0.08
słup uzwojony	1.05	0.06
beton niezbrojony	1.02	0.06

## 5. Ryzyko i niezawodność

Obliczenia przeprowadzono dla elementów konstrukcyjnych:

- Belek stalowych (moment zginający i ścinanie)
- Belek żelbetowych (moment zginający i ścinanie)
- Słupów żelbetowych (ściskanych osiowo i mimośrodowo)
- Płyt żelbetowych (moment zginający i ścinanie)

Obliczenia przeprowadzono metodą Monte Carlo [1]. Otrzymane wartości współczynnika niezawodności są około 3,5 dla belek stalowych i żelbetowych,  $\beta$  jest około 4 dla słupów i około 2,5 dla płyt żelbetowych.

## 5. Uwagi końcowe

Niezawodność konstrukcji budowlanych zależy od parametrów statystycznych obciążeń i nośności. Obliczenia najlepiej przeprowadzać metodą Monte Carlo, ze względu na dokładność, która zależy od liczby symulacji. Przedstawione wyniki najnowszych badań materiałowych wskazują na główne źródła losowej zmienności nośności. Wytrzymałość prętów zbrojeniowych i strun sprężających charakteryzuje się bardzo małym współczynnikiem zmienności. Analiza i obliczenie wskaźników niezawodności może stanowić podstawę do optymalizacji poziomu niezawodności.

## Bibliografia

1. Nowak, A.S. i Collins K.R.: Reliability of Structures, McGraw-Hills, New York 2000.
2. Madsen, H.O., Krenk, S. and Lind, N.C., "Methods of structural safety", Prentice-Hall, New Jersey, 1986.
3. Turkstra, C.J., "Theory of Structural Design Decisions", Solid Mechanics Study No. 2, University of Waterloo, Waterloo, Canada, 1970.
4. Turkstra, C.J. i Madsen, H.O., "Load Combinations in Codified Structural Design", Proceedings of ASCE, Journal of Structural Division, Vol. 106, No. St 12, Dec. 1980, pp. 2527-2543.
5. Ellingwood, B., Galambos, T.V., MacGregor, J.G. i Cornell, C.A., "Development of a Probability Based Load Criterion for American National Standard A58", NBS Special Report 577, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1980.
6. Ellingwood, B. i Rosowsky, D., "Combining Snow and Earthquake Loads for Limit States Design", ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 122, No. 11, 1996, 1364-1368.
7. ACI 318-05, "Building Code Requirements for Structural Concrete", American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2005.
8. Nowak, A.S., Szerszeń, M.M., Szeliga E.K., Szwed, A i Podhorecki, P.J., Reliability-Based Calibration for Structural Concrete, Report UNLCE 05-03, University of Michigan, Ann Arbor, MI, October 2005.